Sur la torsion de la distribution ordinaire universelle attachée à un corps de nombres

Jean-Robert Belliard, Hassan Oukhaba

manuscripta mathematica manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Jean-Robert BELLIARD[1] · Hassan OUKHABA[2]

Sur la torsion de la distribution ordinaire universelle attachée à un corps de nombres

Résumé. We study the torsion subgroup of the universal ordinary distribution related to a general number field. We describe a way to control this subgroup. We apply this method to the special case of an imaginary quadratic field, and we give examples of such fields where these torsion subgroups are non-trivial.

0. Introduction

Kubert dans son article [3] a introduit le formalisme des distributions sur $\mathbb{Q}$. Il y démontre aussi que la distribution ordinaire universelle sur $\mathbb{Q}$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion. La question de l'existence de torsion dans la distribution ordinaire universelle $\mathcal{A}_K$ attachée à un corps de nombres K quelconque se pose. Si on écrit $\mathcal{A}_K$ comme limite inductive de ses sous groupes de niveau $\mathcal{A}_\mathfrak{n}$ indexés par les idéaux entiers de K, alors Yin a montré que $\mathcal{A}_\mathfrak{n}$ est sans ℓ-torsion pourvu que le nombre premier ℓ ne divise pas l'ordre du groupe de Galois $G_\mathfrak{n}$ (voir [9]).

Dans cet article nous nous intéressons au cas où ℓ divise cet ordre et nous dégageons des conditions suffisantes assez fines pour que $\mathcal{A}_\mathfrak{n}$ soit sans ℓ-torsion. Ces conditions sont liées à la structure du ℓ-Sylow d'un sous-groupe de $G_\mathfrak{n}$. Avec comme objectif les applications arithmétiques de [6] nous appliquons ensuite cette démarche au cas où le corps de base K est un corps quadratique imaginaire. Nous obtenons ainsi une majoration pour l'ordre de la torsion des sous-groupes de niveau. Nous montrons ensuite que la distribution ordinaire universelle attachée a tout corps quadratique non-ramifié en 2 contient de la torsion (en fait dans ces cas la borne calculée précédemment est atteinte dès que le corps quadratique est principal).

1. Formalisme général

Avant d'entamer notre étude nous donnons ci-dessous quelques-unes des notations utilisées dans la suite.

1 School of Mathematical Sciences, University of Nottingham
2 UMR 6623,Université de Franche-Comté, Besançon
e-mail: pmxjrb@maths.nott.ac.uk e-mail: hassan@math.univ-fcomte.fr

$\mathcal{O}_K$:= l'anneau des entiers de K.
$\mathfrak{m}_\infty$:= le produit des places réelles de K.
Ψ_0:= Le monoïde des idéaux entiers non nuls de K.
$\bar{\Psi}_0$:= Le groupe des idéaux fractionnaires de K.

De plus pour tout $\mathfrak{n} \in \Psi_0$ nous noterons :

$I_\mathfrak{n}$:= le groupe des idéaux fractionnaires de K premiers avec $\mathfrak{n}$.
$\mathcal{R}_\mathfrak{n}$:= le sous groupe de $I_\mathfrak{n}$ formé des idéaux principaux $x\mathcal{O}_K$ tels que $x \equiv 1 \bmod^\times \mathfrak{n}$ et $\sigma(x) > 0$ pour tout plongement réel σ de K.
$K_\mathfrak{n}$:=le corps de rayon modulo $\mathfrak{n}\mathfrak{m}_\infty$.
$T_\mathfrak{p}(\mathfrak{n})$:= le groupe d'inertie de $\mathfrak{p}$ dans $K_\mathfrak{n}/K$, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier.
$G_\mathfrak{n} := \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{n}/K)$.

Rappelons que le groupe $G_\mathfrak{n}$ est isomorphe à $I_\mathfrak{n}/\mathcal{R}_\mathfrak{n}$, par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin. On notera $(\mathfrak{a}, K_\mathfrak{n}/K)$ l'automorphisme de $K_\mathfrak{n}/K$ associé à l'idéal $\mathfrak{a} \in I_\mathfrak{n}$ par cet isomorphisme. Si X est une partie de $G_\mathfrak{n}$ alors on posera $s(X) := \sum \sigma \in \mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}]$, où σ parcourt les éléments de X et $\#X$ désignera le cardinal de X. Considérons maintenant les relations d'équivalence $\sim_\mathfrak{n}$ définies sur Ψ_0 comme suit :

$$\mathfrak{a} \sim_\mathfrak{n} \mathfrak{b} \iff pgcd(\mathfrak{a}, \mathfrak{n}) = pgcd(\mathfrak{b}, \mathfrak{n}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{n}'}$$

où $\mathfrak{n}'$ est tel que $\mathfrak{n}' pgcd(\mathfrak{a}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$. Lorsque les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont premiers avec $\mathfrak{n}$ alors $\mathfrak{b} \sim_\mathfrak{n} \mathfrak{a}$ si, et seulement si, $(\mathfrak{b}, K_\mathfrak{n}/K) = (\mathfrak{a}, K_\mathfrak{n}/K)$. Notons $\psi_\mathfrak{n}(\mathfrak{a})$ la classe de $\mathfrak{a}$ modulo la relation $\sim_\mathfrak{n}$ et $\Psi_\mathfrak{n} := \Psi_0/\sim_\mathfrak{n}$ l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation. Il est clair que $\Psi_\mathfrak{n}$ est fini. C'est aussi un monoïde unitaire commutatif pour la multiplication des idéaux. L'ensemble des éléments inversibles de $\Psi_\mathfrak{n}$ forme ainsi un groupe, qui est naturellement isomorphe à $G_\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{n} \mid \mathfrak{m}$ alors on a une surjection $\Psi_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \colon \Psi_\mathfrak{m} \longrightarrow \Psi_\mathfrak{n}$. La relation $\sim_\mathfrak{n}$ a été introduite par Deligne et Ribet dans leur article [2] afin d'étudier les valeurs des fonctions L des corps de nombres totalement réels aux entiers négatifs.

L'ensemble $\Psi := \varprojlim \Psi_\mathfrak{n}$ est un espace topologique compact totalement discontinu. Par définition, cf. [5], une distribution sur Ψ à valeurs dans un groupe abélien A est une fonction additive

$$\{\text{ouverts compacts de } \Psi\} \xrightarrow{\mu} A.$$

La projection $g_\mathfrak{n} \colon \Psi \longrightarrow \Psi_\mathfrak{n}$ est continue et surjective. L'image réciproque $g_\mathfrak{n}^{-1}(\psi_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}))$ est donc un ouvert compact pour tout idéal entier $\mathfrak{a} \in \Psi_0$. Posons alors $\mu_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) := \mu(g_\mathfrak{n}^{-1}(\psi_\mathfrak{n}(\mathfrak{a})))$. On dira que μ est une distribution ordinaire si $\mathfrak{a}\mathfrak{n}^{-1} = \mathfrak{b}\mathfrak{m}^{-1}$ entraîne $\mu_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) = \mu_\mathfrak{m}(\mathfrak{b})$. Dans ce cas on peut voir μ comme une application $\bar{\Psi}_0 \longrightarrow A$ telle que l'on a

$$\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{u}^{-1}) = \sum_{\mathfrak{b} \in w(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{a})} \mu(\mathfrak{b}\mathfrak{v}^{-1}) \tag{1.1}$$

pour tous $\mathfrak{a}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \Psi_0$ tels que $\mathfrak{u} \mid \mathfrak{v}$, où $w(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{a})$ est n'importe quel système de représentants dans Ψ_0 de l'image réciproque $\Psi_{\mathfrak{u},\mathfrak{v}}^{-1}(\psi_\mathfrak{u}(\mathfrak{a}))$. En particulier si on pose $\mathfrak{n}'pgcd(\mathfrak{a},\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{a}'pgcd(\mathfrak{a},\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$, alors $\mu(\mathfrak{a}\mathfrak{n}^{-1})$ ne dépend que de la classe de $\mathfrak{a}'$ dans $I_{\mathfrak{n}'}/\mathcal{R}_{\mathfrak{n}'}$.

La notion de distribution intervient fréquemment en arithmétique. On peut par exemple trouver diverses réalisations dans les articles [2], [3], [5], [6], [8], [9], etc ...

2. Distribution ordinaire universelle sur K

Notons $[\bar{\Psi}_0]$ le groupe abélien libre sur $\mathbb{Z}$ engendré par les symboles $[\mathfrak{a}], \mathfrak{a} \in \bar{\Psi}_0$. Soit alors $\mathcal{A}$ le groupe $[\bar{\Psi}_0]$ modulo les relations

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{u}^{-1}] - \sum_{\mathfrak{b}\in w(\mathfrak{u},\mathfrak{v},\mathfrak{a})} [\mathfrak{b}\mathfrak{v}^{-1}], \quad \mathfrak{a},\mathfrak{u},\mathfrak{v} \in \Psi_0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{u} \mid \mathfrak{v} \tag{2.1}$$

Il est clair que la restriction de la projection $[\bar{\Psi}_0] \longrightarrow \mathcal{A}$ à $\bar{\Psi}_0$ est une distribution ordinaire sur K. De plus toute distribution ordinaire $f\colon \bar{\Psi}_0 \longrightarrow A$ revient à se donner un homomorphisme de groupes abéliens $\widetilde{f}\colon \mathcal{A} \longrightarrow A$. Le groupe $\mathcal{A}$ est appelé la distribution ordinaire universelle sur K. Soit $\mathfrak{m} \in \Psi_0$ un idéal entier, et soit $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ l'image dans $\mathcal{A}$ du sous-groupe de $[\bar{\Psi}_0]$ engendré par les symboles $[\mathfrak{a}\mathfrak{m}^{-1}], \mathfrak{a} \in \Psi_0$. Alors $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ est par définition le groupe de niveau $\mathfrak{m}$ de la distribution $\mathcal{A}$. D'après l'article [9] le $\mathbb{Z}$-rang de $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ est $\#G_{\mathfrak{m}}$, ce qui peut se déduire alternativement de l'étude qui suit.

Soit Δ le groupe abélien libre engendré par la réunion disjointe

$$\Delta := \langle \bigsqcup_{\mathfrak{n}\in\Psi_0} G_{\mathfrak{n}} \rangle;$$

et considérons son quotient $\hat{\mathcal{A}} := \Delta/U$, où U est le groupe engendré par les sommes formelles $S(\mathfrak{n},\mathfrak{p}^e,\sigma)$, $\mathfrak{n} \in \Psi_0$ et $\mathfrak{p}$ idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, définies ci-dessous :

$$S(\mathfrak{n},\mathfrak{p}^e,\sigma) := \sigma - s(K_{\mathfrak{n}\mathfrak{p}^e}/K_{\mathfrak{n}})\widetilde{\sigma} \quad \text{si} \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{n} \tag{2.2}$$

$$S(\mathfrak{n},\mathfrak{p}^e,\sigma) := (1-(\mathfrak{p},K_{\mathfrak{n}}/K)^{-1})\sigma - s(K_{\mathfrak{n}\mathfrak{p}^e}/K_{\mathfrak{n}})\widetilde{\sigma} \quad \text{si} \quad \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}. \tag{2.3}$$

Les automorphismes $\sigma \in G_{\mathfrak{n}}$ et $\widetilde{\sigma} \in G_{\mathfrak{n}\mathfrak{p}^e}$ sont choisis de telle sorte que $\widetilde{\sigma} = \sigma$ sur $K_{\mathfrak{n}}$. Si $\mathfrak{n} \mid \mathfrak{n}'$ alors $s(K_{\mathfrak{n}'}/K_{\mathfrak{n}})$ est la somme dans Δ des éléments du groupe de Galois de $K_{\mathfrak{n}'}/K_{\mathfrak{n}}$, soit $s(\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{n}'}/K_{\mathfrak{n}}))$. Alors on a

Théorème 2.1. *Les groupes $\mathcal{A}$ et $\hat{\mathcal{A}}$ sont canoniquement isomorphes en tant que $\mathbb{Z}[G]$-modules, où $G := \varprojlim G_{\mathfrak{n}}$ est la limite projective des groupes $G_{\mathfrak{n}}$.*

Preuve. Remarquons que les relations (2.1) avec $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ ou $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier, engendrent toutes les autres. Si $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ il s'agit de la relation

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{u}^{-1}] - [\mathfrak{b}\mathfrak{v}^{-1}], \quad \mathfrak{b} \sim_{\mathfrak{u}} \mathfrak{a}. \tag{2.4}$$

Supposons que $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\mathfrak{p}$ et soit $\mathfrak{a} \in \Psi_0$. Posons $\mathfrak{d} := pgcd(\mathfrak{u}, \mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}$ et $\mathfrak{n} := \mathfrak{u}\mathfrak{d}^{-1}$. Considérons alors l'entier $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) := \max\{k \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{p}^k \mid \mathfrak{a}\}$. Si $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) < v_\mathfrak{p}(\mathfrak{u})$ alors la relation (2.1) s'écrit simplement

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{n}^{-1}] - \sum_{\mathfrak{b} \in w(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{p}, \mathfrak{a}')} [\mathfrak{b}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{p}^{-1}]. \tag{2.5}$$

Dans ce cas on a bien sûr $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}$. En revanche si $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \geq v_\mathfrak{p}(\mathfrak{u})$ alors $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}$. De plus dans $\Psi_{\mathfrak{n},\mathfrak{n}\mathfrak{p}}^{-1}(\psi_\mathfrak{n}(\mathfrak{a}'))$ on trouve une seule classe pouvant être représentée par un idéal non étranger à $\mathfrak{n}\mathfrak{p}$. Fixons en un et notons le $\mathfrak{b}_0$. Alors on obtient la relation

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{n}^{-1}] - [\mathfrak{b}_0\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{p}^{-1}] - \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in w(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}\mathfrak{p}, \mathfrak{a}') \\ pgcd(\mathfrak{b}, \mathfrak{n}\mathfrak{p}) = 1}} [\mathfrak{b}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{p}^{-1}]. \tag{2.6}$$

Ainsi l'application $[\mathfrak{a}\mathfrak{n}^{-1}] \longrightarrow (\mathfrak{a}, K_\mathfrak{n}/K)$ envoie (2.4) sur 0 tandis que l'image de (2.5) et (2.6) est la somme $S(\mathfrak{n}, \mathfrak{p}, (\mathfrak{a}', K_\mathfrak{n}/K))$. On obtient donc un homomorphisme de groupes abéliens $\rho\colon \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$. Son homomorphisme réciproque ρ^{-1} se déduit de l'application $\Delta \longrightarrow \mathcal{A}$ qui associe à $\sigma \in G_\mathfrak{n}$ la classe de $[\mathfrak{a}\mathfrak{n}^{-1}]$, où $\mathfrak{a} \in \Psi_0$ est choisi de telle sorte que $\sigma = (\mathfrak{a}, K_\mathfrak{n}/K)$. cette application est bien définie étant donné (2.4). $\square$

Notons $\Delta_\mathfrak{m}$ le sous groupe de Δ engendré par $\{\sigma \in G_\mathfrak{n}, \mathfrak{n} \mid \mathfrak{m}\}$, et posons $U_\mathfrak{m} := \Delta_\mathfrak{m} \cap U$. Alors $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ et $\Delta_\mathfrak{m}/U_\mathfrak{m}$ sont isomorphes comme $\mathbb{Z}[G_\mathfrak{m}]$-modules.

3. Sur la ℓ-torsion de $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$

Il s'agit ici de trouver des conditions suffisantes pour que $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ soit sans ℓ-torsion. Notre méthode consiste à comparer la distribution universelle à la distribution d'Iwasawa de K. Celle-ci prend ses valeurs dans la limite directe $\Omega := \varinjlim \mathbb{Q}[G_\mathfrak{n}]$ pour le systeme inductif

$$\mathbb{Q}[G_\mathfrak{n}] \overset{\phi_{\mathfrak{n},\mathfrak{n}'}}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}[G_{\mathfrak{n}'}], \quad \sigma \longmapsto s(K_{\mathfrak{n}'}/K_\mathfrak{n})\widetilde{\sigma},$$

où $\mathfrak{n} \mid \mathfrak{n}'$ et $\widetilde{\sigma}$ est une extension quelconque de σ à $K_{\mathfrak{n}'}$. Pour introduire cette distribution, on définit d'abord les éléments d'Iwasawa suivants :

$$\alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}') := s(\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{n}'}/K_\mathfrak{n})) \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}} (1 - \mathfrak{p}^*), \quad \mathfrak{n} \mid \mathfrak{n}', \tag{3.1}$$

où $\mathfrak{p}^* := \lambda_\mathfrak{p}^{-1} s(T_\mathfrak{p})/\#T_\mathfrak{p}$ est la moyenne des Frobenius inverse de $\mathfrak{p}$, avec $T_\mathfrak{p}{:=}T_\mathfrak{p}(\mathfrak{n}')$ et $\lambda_\mathfrak{p} \in G_{\mathfrak{n}'}/T_\mathfrak{p}$ est le Frobenius en $\mathfrak{p}$ dans $K_{\mathfrak{n}'}/K$. Remarquons que l'on a

$$\phi_{\mathfrak{n}',\mathfrak{n}''}(\alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}')) = \alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'').$$

La distribution d'Iwasawa $\mathcal{F}\colon \Delta \longrightarrow \Omega$ peut être définie comme la limite des applications $\mathcal{F}_\mathfrak{n}\colon \Delta_\mathfrak{n} \longrightarrow \mathbb{Q}[G_\mathfrak{n}]$ où pour $\sigma \in G_\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u} \mid \mathfrak{n}$ on a posé

$$\mathcal{F}_\mathfrak{n}(\sigma) = \phi_{\mathfrak{u},\mathfrak{n}}(\sigma\alpha(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})) = \widetilde{\sigma}\alpha(\mathfrak{u}, \mathfrak{n}).$$

Considérons maintenant le sous groupe $U(\mathfrak{n})$ de $\Delta_{\mathfrak{n}}$ engendré par les sommes $S(\mathfrak{u},\mathfrak{p}^e,\sigma)$ pour lesquelles on a $\mathfrak{u}\mathfrak{p}^e \mid \mathfrak{n}$. On vérifie aisément l'inclusion $U \subset \ker(\mathcal{F})$. On en déduit $U_{\mathfrak{n}} \subset \ker(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})$. D'autre part l'inclusion $U(\mathfrak{n}) \subset U_{\mathfrak{n}}$ donne une surjection

$$\ker(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})/U(\mathfrak{n}) \twoheadrightarrow \ker(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})/U_{\mathfrak{n}}. \tag{3.2}$$

On va voir avec (3.3) et le théorème 3.1 ci-dessous que ces deux groupes sont finis. Comme $\mathrm{Im}(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion, on pourra en déduire les égalités

$$\mathrm{Tor}(\Delta_{\mathfrak{n}}/U(\mathfrak{n})) = \ker(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})/U(\mathfrak{n}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tor}(\Delta_{\mathfrak{n}}/U_{\mathfrak{n}}) = \ker(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})/U_{\mathfrak{n}},$$

où $\mathrm{Tor}(A)$ désigne la torsion du groupe abélien A. En conséquence, si le quotient $\Delta_{\mathfrak{m}}/U(\mathfrak{m})$ est sans ℓ-torsion, il en est de même pour $\Delta_{\mathfrak{m}}/U_{\mathfrak{m}}$. Cela incite à étudier le groupe $\ker(\mathcal{F}_{\mathfrak{m}})/U(\mathfrak{m})$, d'autant plus que la définition de $U(\mathfrak{m})$ est plus explicite que celle de $U_{\mathfrak{m}}$.

Notons $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers qui divisent $\mathfrak{m}$, et $e_1, \ldots, e_s$ leurs exposants respectifs de sorte qu'on ait l'égalité $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s}$. Soit Σ l'ensemble des diviseurs $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{m}$ tels que $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1^{t_1 e_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{t_s e_s}$, avec $t_i \in \{0,1\}$. On choisit sur Σ une relation d'ordre totale $\prec$ prolongeant la division, c'est-à-dire vérifiant l'implication $(\mathfrak{n} \mid \mathfrak{n}') \Rightarrow (\mathfrak{n} \prec \mathfrak{n}')$. La relation $\prec$ permet d'associer à tout $\mathfrak{n} \in \Sigma$ les deux sous groupes de $\Delta_{\mathfrak{m}}$ définis par les systèmes de générateurs :

$$\hat{\Delta}_{\mathfrak{n}} := \langle \sigma \in G_{\mathfrak{u}} \big| \quad \mathfrak{u} \in \Sigma \quad \text{et} \quad \mathfrak{u} \prec \mathfrak{n} \rangle$$

$$\hat{U}(\mathfrak{n}) := \langle S(\mathfrak{u}, \mathfrak{p}_i^{e_i}, \sigma) \big| \quad \mathfrak{u} \in \Sigma, \quad \mathfrak{p}_i \nmid \mathfrak{u} \quad \text{et} \quad \mathfrak{u}\mathfrak{p}_i^{e_i} \prec \mathfrak{n} \rangle$$

La restriction de $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$ à $\hat{\Delta}_{\mathfrak{n}}$ sera notée $\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{n}}$. Pour $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$, les deux groupes $\hat{\Delta}_{\mathfrak{m}}/\hat{U}(\mathfrak{m})$ et $\Delta_{\mathfrak{m}}/U(\mathfrak{m})$ sont égaux, on a donc l'égalité

$$\ker(\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{m}})/\hat{U}(\mathfrak{m}) = \ker(\mathcal{F}_{\mathfrak{m}})/U(\mathfrak{m}). \tag{3.3}$$

Nous utiliserons aussi l'idéal $S(\mathfrak{n})$ de $\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]$ engendré par les traces suivant les sous-groupes d'inertie, c'est-à-dire les sommes $s(T_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{n})) = s(K_{\mathfrak{n}}/K_{\mathfrak{n}_i})$, où $\mathfrak{n}_i {\mathfrak{p}_i}^{e_i} = \mathfrak{n}$, et où $\mathfrak{p}_i$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers qui divisent un $\mathfrak{n} \in \Sigma$ fixé. L'exposant du sous-groupe de torsion de $\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]/S(\mathfrak{n})$ sera noté $z_{\mathfrak{n}}$.

Théorème 3.1. *Soit* $\mathfrak{n} \in \Sigma$, *alors* $\ker(\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{n}})/\hat{U}(\mathfrak{n})$ *est fini et on a*

$$\left(\prod_{\mathfrak{u} \prec \mathfrak{n}} z_{\mathfrak{u}}\right) \ker(\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{n}}) \subset \hat{U}(\mathfrak{n}).$$

Preuve. On fait un raisonnement par récurrence sur $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{n} = (1)$ alors $\ker(\hat{\mathcal{F}}_\mathfrak{n}) = 0$. Ainsi on peut supposer $\mathfrak{n} \neq (1)$. Soit alors $\tilde{\mathfrak{n}}$ le prédécesseur de $\mathfrak{n}$, c'est-à-dire que $\tilde{\mathfrak{n}} = max\{\mathfrak{u} \prec \mathfrak{n}, \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n}\}$. On pose $R := \mathbb{Z}[G_\mathfrak{m}]$. La composée des deux applications naturelles

$$\hat{\Delta}_\mathfrak{n} \longrightarrow \mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}] \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}] \longrightarrow \mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}]/S(\mathfrak{n})$$

est un R-homomorphisme surjectif avec un noyau égal à $S(\mathfrak{n}) + \hat{\Delta}_{\tilde{\mathfrak{n}}} = \hat{U}(\mathfrak{n}) + \hat{\Delta}_{\tilde{\mathfrak{n}}}$. Mais comme $\hat{U}(\tilde{\mathfrak{n}}) \subset \hat{U}(\mathfrak{n}) \cap \hat{\Delta}_{\tilde{\mathfrak{n}}}$ on obtient la suite exacte

$$\hat{\Delta}_{\tilde{\mathfrak{n}}}/\hat{U}(\tilde{\mathfrak{n}}) \longrightarrow \hat{\Delta}_\mathfrak{n}/\hat{U}(\mathfrak{n}) \longrightarrow \mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}]/S(\mathfrak{n}) \longrightarrow 0.$$

D'autre part $\mathcal{F}_\mathfrak{m}$ induit un homomorphisme de R-modules surjectif

$$\beta_\mathfrak{n} \colon \mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}]/S(\mathfrak{n}) \longrightarrow \mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_\mathfrak{n})/\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}}).$$

Ainsi, en applicant $\mathcal{F}_\mathfrak{m}$ à notre suite exacte on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\Delta}_{\tilde{\mathfrak{n}}}/\hat{U}(\tilde{\mathfrak{n}}) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\Delta}_\mathfrak{n}/\hat{U}(\mathfrak{n}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}]/S(\mathfrak{n}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_\mathfrak{n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}}) \arrow[r] & \mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_\mathfrak{n}) \arrow[r] & \mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_\mathfrak{n})/\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On en déduit la suite exacte :

$$\ker(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}})/\hat{U}(\tilde{\mathfrak{n}}) \longrightarrow \ker(\hat{\mathcal{F}}_\mathfrak{n})/\hat{U}(\mathfrak{n}) \longrightarrow \ker \beta_\mathfrak{n} \longrightarrow 0. \tag{3.4}$$

Par récurrence $\ker(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}})/\hat{U}(\tilde{\mathfrak{n}})$ est fini et est annulé par $\prod_{\mathfrak{u} \prec \tilde{\mathfrak{n}}} z_\mathfrak{u}$. Il suffit donc, pour conclure la preuve du théorème, de vérifier que $\ker \beta_\mathfrak{n}$ est fini. Mais comme $\ker \beta_\mathfrak{n}$ est de type fini on doit seulement s'assurer que les modules $\mathbb{Z}[G_\mathfrak{n}]/S(\mathfrak{n})$ et $\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_\mathfrak{n})/\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}})$ ont même rang sur $\mathbb{Z}$. Or on peut prouver par la théorie des caractères que

$$\mathrm{rang}(S(\mathfrak{n})) = \sum_{\substack{\mathfrak{u} \in \Sigma, \mathfrak{u} | \mathfrak{n} \\ \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n}}} (-1)^{d(\mathfrak{u},\mathfrak{n})+1} [K_\mathfrak{u} : K],$$

où $d(\mathfrak{u}, \mathfrak{n}) := \#\{i,\ \mathfrak{p}_i \mid \mathfrak{n} \text{ et } \mathfrak{p}_i \nmid \mathfrak{u}\}$ (la preuve de [1], Proposition 2.11 se retranscrit telle quelle). Il reste à calculer le rang de $\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_\mathfrak{n})/\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}})$. Pour ce faire considérons les modules suivants

Définition 3.2. *Soient $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \Sigma$ tels que $\mathfrak{u} \mid \mathfrak{v}$. On définit alors les quatre R-modules $X_\mathfrak{u}, Y_\mathfrak{u}, X_\mathfrak{u}(\mathfrak{v})$ et $Y_\mathfrak{u}(\mathfrak{v})$ en donnant une famille de générateurs de chacun d'entre eux :*

$$X_\mathfrak{u} := \langle \alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \Big| \ \mathfrak{n} \in \Sigma,\ \mathfrak{n} \mid \mathfrak{u} \rangle,$$

$$Y_\mathfrak{u} := \langle \alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \Big| \ \mathfrak{n} \in \Sigma,\ \mathfrak{n} \mid \mathfrak{u} \text{ et } \mathfrak{n} \neq \mathfrak{u} \rangle,$$

$$X_\mathfrak{u}(\mathfrak{v}) := \langle \alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \Big| \ \mathfrak{n} \in \Sigma,\ \mathfrak{n} \mid \mathfrak{v} \text{ et } \mathfrak{n} \prec \mathfrak{u} \rangle,$$

$$Y_\mathfrak{u}(\mathfrak{v}) := \langle \alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \Big| \ \mathfrak{n} \in \Sigma,\ \mathfrak{n} \mid \mathfrak{v},\ \mathfrak{n} \prec \mathfrak{u} \text{ et } \mathfrak{n} \neq \mathfrak{u} \rangle.$$

Proposition 3.3. *Soient* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \Sigma$ *tels que* $\mathfrak{u} \mid \mathfrak{v}$. *Alors on a*

$$\mathrm{rang}\Big(X_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v})/Y_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v})\Big) = \mathrm{rang}\Big(X_{\mathfrak{u}}/Y_{\mathfrak{u}}\Big).$$

Preuve. On voit que $X_{\mathfrak{u}} \subset X_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v})$ et $Y_{\mathfrak{u}} \subset Y_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v})$. De plus on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow X_{\mathfrak{u}} \cap Y_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v})/Y_{\mathfrak{u}} \longrightarrow X_{\mathfrak{u}}/Y_{\mathfrak{u}} \longrightarrow X_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v})/Y_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v}) \longrightarrow 0.$$

Or le $\mathbb{Z}$-module $X_{\mathfrak{u}} \cap Y_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{v})/Y_{\mathfrak{u}}$ est fini puisqu'il est de type fini et annulé par $[K_{\mathfrak{v}} : K_{\mathfrak{u}}]$. Ceci prouve la proposition et montre en particulier que

$$\mathrm{rang}\Big(\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{n}})/\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}})\Big) = \mathrm{rang}\Big(X_{\mathfrak{n}}/Y_{\mathfrak{n}}\Big).$$

En effet on a $\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{n}}) = X_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})$ et $\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}}) = Y_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})$. □
Il nous faut maintenant calculer le rang du $\mathbb{Z}$-module $X_{\mathfrak{n}}/Y_{\mathfrak{n}}$.

Proposition 3.4. *On a* $X_{\mathfrak{n}} = \phi_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}(\mathrm{Im}(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}}))$. *De plus* $\mathrm{Im}(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})$ *est un* $\mathbb{Z}$-*module libre de rang* $\#G_{\mathfrak{n}}$.

preuve. La première assertion est évidente. Pour montrer la seconde il suffit de vérifier que si χ est un caractère complexe du groupe $G_{\mathfrak{n}}$ alors $\chi(\mathrm{Im}(\mathcal{F}_{\mathfrak{n}})) \neq 0$. Or si on note $\mathfrak{n}_\chi$ le conducteur de χ alors $\chi(\alpha(\mathfrak{n}_\chi, \mathfrak{n})) = \#\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{n}}/K_{\mathfrak{n}_\chi})$. □

Comme $\phi_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ est injective on a $\mathrm{rang}(X_{\mathfrak{n}}) = \#G_{\mathfrak{n}}$. Par ailleurs on a $Y_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{n}) = X_{\mathfrak{u}'}(\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{u}' := \max\{\mathfrak{t} \in \Sigma,\ \mathfrak{t} \mid \mathfrak{n},\ \mathfrak{t} \prec \mathfrak{u} \text{ et } \mathfrak{t} \neq \mathfrak{u}\}$. D'où la relation

$$\sum_{\substack{\mathfrak{u} \in \Sigma, \mathfrak{u} \mid \mathfrak{n} \\ \mathfrak{u} \neq \mathfrak{n}}} \mathrm{rang}\Big(X_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{n})/Y_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{n})\Big) = \mathrm{rang}(Y_{\mathfrak{n}}),$$

qui peut être utilisée pour prouver, par récurrence sur $|\mathfrak{n}| := d((1), \mathfrak{n})$, la formule

$$\mathrm{rang}\Big(X_{\mathfrak{n}}/Y_{\mathfrak{n}}\Big) = \sum_{\mathfrak{u} \in \Sigma, \mathfrak{u} \mid \mathfrak{n}} (-1)^{d(\mathfrak{u},\mathfrak{n})}[K_{\mathfrak{u}} : K].$$

Ainsi on a prouvé l'identité

$$\mathrm{rang}\Big(\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{n}})/\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{F}}_{\tilde{\mathfrak{n}}})\Big) = \mathrm{rang}\Big(\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]/S(\mathfrak{n})\Big),$$

et ceci complète la preuve de la proposition et du théorème. □

Proposition 3.5. *Posons* $H := K_{(1)}$ *et soit* ℓ *un nombre premier. Soit* $G_\ell(\mathfrak{m})$ *le* ℓ-*Sylow du groupe de Galois de* $K_{\mathfrak{m}}/H$ *et* $G_{\mathfrak{p}}^\ell(\mathfrak{m})$, *pour* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$, *le* ℓ-*Sylow de* $T_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})$. *Supposons que* $G_\ell(\mathfrak{m})$ *est le produit direct des groupes* $G_{\mathfrak{p}}^\ell(\mathfrak{m})$. *Alors* $\ell \nmid \prod_{\mathfrak{u} \in \Sigma} z_{\mathfrak{u}}$. *En particulier le groupe* $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ *est sans* ℓ-*torsion.*

Remarque 3.6. *Il est possible de montrer que si* $\mathfrak{u}$ *est divisible par au plus deux idéaux premiers alors* $z_{\mathfrak{u}} = 1$.

Preuve de la proposition 3.5. Fixons $\mathfrak{u} \in \Sigma$. Les hypothèses de la proposition impliquent que le ℓ-Sylow $G_\ell(\mathfrak{u})$ de $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{u}/H)$ est le produit direct des ℓ-Sylow $G_\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{u})$ de $T_\mathfrak{p}(\mathfrak{u}), \mathfrak{p} \mid \mathfrak{u}$. Cette remarque nous sera utile pour montrer que $\ell \nmid z_\mathfrak{u}$. La première étape de la démonstration consiste à décomposer $\mathbb{Z}[G_\mathfrak{u}]/S(\mathfrak{u})$ en somme directe de sous-$\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules. En effet, les $s(T_\mathfrak{p}(\mathfrak{u})), \mathfrak{p} \mid \mathfrak{u}$ engendrent dans $\mathbb{Z}[\Gamma]$ un idéal que nous noterons $\widetilde{S}(\mathfrak{u})$. De plus si $\{\gamma_\mathfrak{u}(\tau),\ \tau \in \mathrm{Gal}(H/K)\}$ est un système de représentants de $G_\mathfrak{u}$ modulo Γ, alors on a l'isomorphisme de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules suivant :

$$\frac{\mathbb{Z}[G_\mathfrak{u}]}{S(\mathfrak{u})} \simeq \bigoplus_{\tau \in \mathrm{Gal}(H/K)} \frac{\mathbb{Z}[\Gamma]}{\widetilde{S}(\mathfrak{u})} \gamma_\mathfrak{u}(\tau). \tag{3.5}$$

Nous devons donc montrer que $\mathbb{Z}[\Gamma]/\widetilde{S}(\mathfrak{u})$ est sans ℓ-torsion. Cela revient à vérifier que le $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$-module

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}[\Gamma]/\widetilde{S}(\mathfrak{u}) \simeq \mathbb{Z}_\ell[\Gamma]/\widetilde{S}(\mathfrak{u})\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$$

est sans $\mathbb{Z}_\ell$-torsion. A cette fin on écrit $\Gamma = G' \times G_\ell(\mathfrak{u})$, avec $\ell \nmid \#G'$, et on note $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères $\mathbb{Q}_\ell$-irréductibles de G'. Soit $\{e_\chi,\ \chi \in \mathfrak{X}\}$ le système complet d'idempotents associés aux éléments de $\mathfrak{X}$. Rappelons que ce système vérifie les relations (orthogonalité des caractères) $\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} e_\chi = 1$ et $e_\chi e_{\chi'} = 0$ (resp. e_χ) si $\chi' \neq \chi$ (resp. $\chi' = \chi$). On en tire l'isomorphisme suivant :

$$\frac{\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]}{\widetilde{S}(\mathfrak{u})\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]} \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}} \frac{e_\chi \mathbb{Z}_\ell[\Gamma]}{e_\chi \widetilde{S}(\mathfrak{u})\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]}.$$

D'autre part, si pour un caractère donné $\chi \in \mathfrak{X}$ on pose $A_\chi := e_\chi \mathbb{Z}_\ell[G']$, alors on constate que les deux A_χ-algèbres

$$\frac{e_\chi \mathbb{Z}_\ell[\Gamma]}{e_\chi \widetilde{S}(\mathfrak{u})\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]} \quad \text{et} \quad A(\chi, \mathfrak{u}) := \frac{A_\chi[G_\ell(\mathfrak{u})]}{\widetilde{S}(\mathfrak{u})A_\chi[G_\ell(\mathfrak{u})]}$$

sont isomorphes. De plus comme $G_\ell(\mathfrak{u}) = \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{u}} G_\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{u})$ on obtient la décomposition :

$$A(\chi, \mathfrak{u}) \simeq \bigotimes_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{u}} \frac{A_\chi[G_\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{u})]}{s(T_\mathfrak{p}(\mathfrak{u}))A_\chi[G_\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{u})]}.$$

de $A(\chi, \mathfrak{u})$ en produit tensoriel sur A_χ des algèbres

$$A(\chi, \mathfrak{u}, \mathfrak{p}) := A_\chi[G_\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{u})]/s(T_\mathfrak{p}(\mathfrak{u}))A_\chi[G_\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{u})].$$

Or les $A(\chi, \mathfrak{u}, \mathfrak{p})$ sont des A_χ-modules libres, et comme A_χ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre on déduit que les $A(\chi, \mathfrak{u}, \mathfrak{p})$ sont eux-mêmes $\mathbb{Z}_\ell$-libres. Ce qui complète la preuve de la proposition. □

Corollaire 3.7. *Soit $\mathfrak{m} = n\mathbb{Z}$ un idéal de $\mathbb{Z}$. Alors le groupe de niveau $\mathfrak{m}$ de la distribution ordinaire universelle sur $\mathbb{Q}$ est un groupe abélien libre.*

Preuve. Cela tient au fait que le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{n}})$ est égal au produit direct des groupes d'inertie. $\square$

Corollaire 3.8. *inj Supposons que* $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{m}}/H)$ *est égal au produit direct de ses sous-groupes d'inertie. Alors on a* $U(\mathfrak{m}) = U \cap \Delta_{\mathfrak{m}}$*. De plus, pour tout diviseur* $\mathfrak{n}$ *de* $\mathfrak{m}$*,* $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}}$ *est* $\mathbb{Z}$*-libre.*

4. Le cas des corps quadratiques imaginaires

Nous supposons à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cet article que K est un corps quadratique imaginaire.

4.1. Ennoncés des resultats.

La proposition 3.5, appliquée à cette situation particulière, entraîne le résultat suivant

Corollaire 4.1. *Soit* w_K *le nombre de racines de l'unité du corps quadratique imaginaire* K*. Soit* ℓ *un nombre premier qui ne divise pas* w_K*,* $\ell \nmid w_K$*. Alors la distribution ordinaire universelle sur* K *est sans* ℓ*-torsion.*

Preuve. Le lecteur peut facilement vérifier que le ℓ-Sylow de $G_{\mathfrak{m}}$ est égal au produit direct des ℓ-Sylow des groupes d'inertie $T_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$. $\square$

Dans la section précédente on a calculé un multiple $\prod_{\mathfrak{u}|\mathfrak{m}} z_{\mathfrak{u}}$ de l'exposant de $\mathrm{Tor}(\mathcal{A}_{\mathfrak{m}})$. Si on suit la preuve de la proposition 3.5, on voit que les sous-groupes de torsion des quotients $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{n}}/H)]/\widetilde{S}(\mathfrak{n})$, pour $\mathfrak{n} \mid \mathfrak{m}$, jouent un rôle prépondérant. Pour le cas particulier qui nous intéresse en vue des applications de [6], ces derniers sous-groupes de torsion sont décrits par le

Théorème 4.2. *Soit* $\mathfrak{n}$ *un élément de* Σ*, supposé premier à* w_K*. Rappelons que* $|\mathfrak{n}|$ *désigne le nombre d'idéaux premiers qui divisent* $\mathfrak{n}$*. On a*

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{n}}/H)]/\widetilde{S}(\mathfrak{n})) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } |\mathfrak{n}| = 1 \text{ ou } |\mathfrak{n}| \text{ pair,} \\ \mathbb{Z}/w_K\mathbb{Z} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 4.3. *Supposons que* $\mathfrak{m}$ *est un idéal propre de* $\mathcal{O}_K$ *et premier à* w_K*. Alors l'ordre du groupe* $\mathrm{Tor}(\mathcal{A}_{\mathfrak{m}})$ *divise* $(w_K)^{ah}$*,où* h *est le nombre de classes d'idéaux de* K *et* $a = 2^{|\mathfrak{m}|-1} - |\mathfrak{m}|$*.*

Preuve du corollaire. La suite exacte (3.4) permet de montrer par récurrence sur $\mathfrak{n} \in \Sigma - \{(1)\}$ que l'ordre de $\ker(\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{n}})/\hat{U}(\mathfrak{n})$ divise $(w_K)^{a_{\mathfrak{n}}h}$, où

$$a_{\mathfrak{n}} := \#\{\mathfrak{u} \in \Sigma,\ \mathfrak{u} \prec \mathfrak{n},\ |\mathfrak{u}| \text{ impair et } |\mathfrak{u}| \geq 3\}.$$

En effet, $\ker \beta_{\mathfrak{n}}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]/S(\mathfrak{n}))$. D'où, grace à (3.5) et au théorème 4.2, l'ordre de $\ker \beta_{\mathfrak{n}}$ divise $(w_K)^h$. De plus $\ker \beta_{\mathfrak{n}} = \{0\}$, si $|\mathfrak{n}|$ est égal à 1 ou à un entier pair. Il ne reste plus qu'à vérifier que $a_{\mathfrak{m}} = 2^{|\mathfrak{m}|-1} - |\mathfrak{m}|$. $\square$

Le reste de cette section est consacré à la preuve du théorème 4.2.

4.2. Preuve du théorème 4.2

D'après le corollaire 4.1, il suffit de montrer que les ℓ-parties de $\mathbb{Z}/w_K\mathbb{Z}$ et de $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{n}/H)]/\widetilde{S}(\mathfrak{n}))$ coïncident pour les nombres premiers ℓ qui divisent w_K. Fixons donc un tel ℓ (en fait $\ell = 2$ ou 3). Pour simplifier les notations on suppose que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$, ce qui ne change rien à la généralité de la démonstration, et on pose $m = |\mathfrak{m}|$. On laisse de coté le cas immédiat $m = 1$. On commence par énoncer sous forme de remarques des faits élémentaires qui nous serons utiles.

Remarque 4.4. *Le groupe* $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{m}/H)$ *est engendré par les sous-groupes d'inertie* $T_\mathfrak{p}(\mathfrak{m})$*,* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$ *(ce résultat bien sûr vaut pour tout corps de nombres).*

Remarque 4.5. *Comme* $\mathfrak{m}$ *est premier à* w_K *et* $m > 1$ *on a pour tout* i

$$T_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m}) \simeq (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i^{e_i})^\times.$$

Remarque 4.6. *Soit* $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$*, alors les groupes d'inertie* $T_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m})$*,* $i \neq i_0$ *forment un produit direct.*

La remarque 4.5 montre en particulier que le ℓ-Sylow $G^\ell_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m})$ de $T_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m})$ est cyclique. Posons alors $g_i := o(G^\ell_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m}))$ et supposons que $g_m \leq g_i$, pour tout i. Les remarques 4.4 et 4.6 permettent de vérifier que l'on peut trouver dans $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{m}/H)$ des éléments $\tau_1, \ldots, \tau_m$ tels que $G^\ell_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m}) = \langle \tau_i \rangle$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, et $G_\ell(\mathfrak{m}) = \langle \tau_1 \rangle \times \langle \tau_2 \rangle \times \cdots \times \langle \tau_m \rangle$. De plus on a $G^\ell_{\mathfrak{p}_m}(\mathfrak{m}) = \langle j \rangle$, où

$$j := \prod_{i=1}^{m} \tau_i^{\frac{g_i}{g_m}}$$

Notons que l'ordre de τ_m est $o(\langle \tau_m \rangle) = g_m/\ell^r$, où ℓ^r est la plus grande puissance de ℓ divisant w_K. Ecrivons, comme en section 3, $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{m}/H) = G' \times G_\ell(\mathfrak{m})$ et soit G'_i le sous-groupe de G' tel que $T_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m}) = G'_i \times G^\ell_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m})$.

Il s'agit de calculer la ℓ-torsion de $A(\chi, \mathfrak{m})$ pour tout caractère $\mathbb{Q}_\ell$-irréductible du groupe G'. On a d'abord le lemme évident :

Lemme 4.7. *Soit* $\Lambda := \mathbb{Z}[G_\ell(\mathfrak{m})]$ *et* Λ_χ *le* Λ*-module engendré par les traces* $s(G^\ell_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m}))$ *pour lesquelles* χ *est trivial sur* G'_i*. Alors* $A(\chi, \mathfrak{m})$ *est naturellement isomorphe à* $A_\chi \otimes_\mathbb{Z} \Lambda/\Lambda_\chi$*.*

Proposition 4.8. *Soit* P *une partie de* $\{1, \ldots, m\}$ *distincte de* $\{1, \ldots, m\}$*. Notons* $\Lambda(P)$ *le* Λ*-module engendré par les traces* $s(\langle \tau_i \rangle)$*,* $i \in P$*. Alors le module* $\Lambda/\Lambda(P)$ *est libre sur* $D := \mathbb{Z}[\langle \tau_k,\ k \notin P \rangle]$*. En particulier si* χ *n'est pas trivial sur* G'_m *alors* Λ/Λ_χ *est sans* $\mathbb{Z}$*-torsion.*

Preuve. Il est clair que $\Lambda/\Lambda(P)$ est isomorphe au produit tensoriel sur D

$$\bigotimes_{n \in P} \frac{D[\langle \tau_n \rangle]}{s(\langle \tau_n \rangle) D}.$$

Cela donne la première assertion puisque $D[\langle\tau_n\rangle]/s(\langle\tau_n\rangle)D$ est libre sur D (de rang $g_n - 1$).

D'autre part pour $i \neq m$ les τ_i engendrent les ℓ-groupes d'inerties : $\langle\tau_i\rangle = G^{\ell}_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m})$. En particulier lorsque χ est non trivial sur G'_m, on a l'égalité $\Lambda_\chi = \Lambda(P_\chi)$ pour $P_\chi = \{i \,\big|\, \chi(G'_i) = \{1\}\}$. Et la seconde assertion en découle. $\square$

Pour étudier la torsion de $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{n}}/H)]/\widetilde{S}(\mathfrak{n})$, on est amené à considérer les Λ-modules $\Theta(P)$ engendré par les $s(G^{\ell}_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m}))$, $i \in P$. Remarquons que si $m \notin P$, alors $\Theta(P)$ est égal au module $\Lambda(P)$ défini ci-dessus. En particulier, toujours si $m \notin P$, on a l'isomorphisme

$$\Lambda/\Theta(P \cup \{s\}) \simeq \frac{\Lambda/\Lambda(P)}{s(\langle j\rangle)\Lambda/\Lambda(P)}.$$

De plus comme $\Lambda/\Lambda(P)$ est $\mathbb{Z}$-libre d'après la proposition 4.8 ci-dessus on a

$$\mathrm{Tor}(\Lambda/\Theta(P \cup \{s\})) \simeq H^2(\langle j\rangle, \Lambda/\Lambda(P)). \tag{4.1}$$

La preuve du théorème 4.2 consiste à calculer ces groupes de cohomologie.

Proposition 4.9. *Soit $P \subset Q$ et $P \neq Q$ deux parties de $\{1, \ldots, m\}$ telles que $m \notin Q$. Soit D_Q le sous-groupe de $G_\ell(\mathfrak{m})$ engendré par les $G^{\ell}_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m})$, $i \notin Q$. Alors on a*

$$H^k_{P,Q} := H^k(D_Q, \Lambda/\Lambda(P)) = 0, \text{ pour tout } k \geq 1. \tag{4.2}$$

Preuve. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le cardinal de P. Le cas où $P = \emptyset$ est trivial puisqu'alors $\Lambda/\Lambda(P) = \Lambda$ qui est libre sur tout sous-groupe de $G_\ell(\mathfrak{m})$. Supposons que (4.2) est prouvée pour tout couple (P', Q') de sous-ensembles de $\{1, \ldots, m\}$ vérifiant les hypothèses de la proposition et tels que le cardinal de $P' < \#P$. On peut bien sûr écrire P comme une réunion disjointe $P = \{i_0\} \cup P'$ où $i_0 \in P$. On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow s(\langle\tau_{i_0}\rangle)(\Lambda/\Lambda(P')) \longrightarrow \Lambda/\Lambda(P') \longrightarrow \Lambda/\Lambda(P) \longrightarrow 0.$$

D'où l'on tire

$$H^k_{P',Q} \longrightarrow H^k_{P,Q} \longrightarrow H^{k+1}(D_Q, s(\langle\tau_{i_0}\rangle)(\Lambda/\Lambda(P'))) \longrightarrow H^{k+1}_{P',Q}.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que les deux groupes $H^k_{P',Q}$ et $H^{k+1}_{P',Q}$ sont nuls. Il vient donc

$$H^k_{P,Q} \simeq H^{k+1}(D_Q, s(\langle\tau_{i_0}\rangle)(\Lambda/\Lambda(P'))).$$

Or $\Lambda/\Lambda(P')$ est libre sur $\langle\tau_{i_0}\rangle$ comme énoncé dans la proposition 4.8. En particulier on a $s(\langle\tau_{i_0}\rangle)(\Lambda/\Lambda(P')) = (\Lambda/\Lambda(P'))^{\langle\tau_{i_0}\rangle}$ et

$$H^n(\langle\tau_{i_0}\rangle, \Lambda/\Lambda(P')) = H^n(\langle\tau_{i_0}\rangle, \Lambda(P')) = 0 \text{ pour tout } n > 0.$$

D'autre part si on pose $Q' := Q - \{i_0\}$ alors on a $D_{Q'} = \langle D_Q, \tau_{i_0}\rangle$. Comme on a supposé $P \neq Q$, on a $\{i_0\} \subsetneq Q$. La remarque 4.4 montre donc l'égalité

$D_Q \cap \langle \tau_{i_0} \rangle = \{1\}$, qui permet d'identifier D_Q avec le quotient $D_{Q'}/\langle \tau_{i_0} \rangle$. D'après le corollaire p. 118 de [7] ou le Theorem 2 p. 161 de [4], l'inflation en degré $k+1$ donne donc un isomorphisme :

$$H^{k+1}(D_Q, (\Lambda/\Lambda(P'))^{\langle \tau_{i_0} \rangle}) \simeq H^{k+1}(D_{Q'}, \Lambda/\Lambda(P')).$$

Mais comme $\#P' < \#P$, le terme de droite est trivial, d'où la proposition. □

Corollaire 4.10. *Si le caractère χ est non-trivial sur G' alors le $\mathbb{Z}$-module Λ/Λ_χ est sans torsion.*

Preuve. Si χ est non trivial sur G'_m, c'est la proposition 4.8. Sinon soit P l'ensemble des indices $i \neq m$ tels que χ est trivial sur G'_i et soit $Q := \{1, \ldots, m-1\}$. Comme χ est supposé trivial sur G'_m et non sur G' on a l'inclusion stricte $P \subsetneq Q$. D'après la définition de Θ et (4.1) on a

$$\mathrm{Tor}(\Lambda/\Lambda_\chi) = \mathrm{Tor}(\Lambda/\Theta(P \cup \{s\})) \simeq H^2(D_Q, \Lambda/\Lambda(P)).$$

La proposition 4.9 permet de conclure. □

Il reste à calculer la torsion de Λ/Λ_χ lorsque χ est trivial. Dans ce cas on a $\Lambda_\chi = \Theta(P_m)$ où $P_i := \{1, \ldots, i\}$. D'après (4.1) on doit calculer le groupe $H^2(\langle j \rangle, \Lambda/\Lambda(P_{m-1}))$. La démarche suivie pour prouver la proposition 4.9 montre en fait que l'on a

$$H^k(D_{P_{i+1}}, \Lambda/\Lambda(P_{i+1})) \simeq H^{k+1}(D_{P_i}, \Lambda/\Lambda(P_i)),\ i \in \{1, \ldots, m-2\}.$$

En particulier on a

$$H^2(\langle j \rangle, \Lambda/\Lambda(P_{m-1})) \simeq H^m(D_{P_1}, \Lambda/\Lambda(P_1)) \simeq H^{m+1}(D_{P_1}, \Lambda^{\langle \tau_1 \rangle}).$$

Or $\Lambda^{\langle \tau_1 \rangle} = s(\langle \tau_1 \rangle)\Lambda$ est libre sur le sous-groupe $\langle \tau_2, \ldots, \tau_{m-1} \rangle$ de D_{P_1}. L'inflation en degré $m+1$ donne alors l'isomorphisme

$$H^{m+1}(D_{P_1}, \Lambda^{\langle \tau_1 \rangle}) \simeq H^{m+1}(\langle j \rangle, \Lambda^{\langle \tau_1, \ldots, \tau_{m-1} \rangle}).$$

Le groupe de cohomologie de droite se calcul sans difficulte: il est égal à 0 si m est pair, et a $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ si m est impair. Ceci achève la preuve du théorème 4.2.

5. Construction d'exemples où $\mathrm{Tor}(\mathcal{A}_\mathfrak{m}) \neq \{0\}$

Dans cette section K est toujours un corps quadratique imaginaire. Nous avons vu précédemment que $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ est sans torsion si $s \leq 2$ et que pour $s = 3$, $\#\mathrm{Tor}(\mathcal{A}_\mathfrak{m})$ divise $(w_K)^h$.

Proposition 5.1. *On suppose que $w_K = 2$ et que K contient trois idéaux premiers principaux $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ tels que $N\mathfrak{p}_i \equiv 3$ modulo 4. On pose $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$. Alors $\mathrm{Tor}(\Delta_\mathfrak{m}/U(\mathfrak{m})) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^h$ et $\mathrm{Tor}(\mathcal{A}_\mathfrak{m}) \neq 0$.*

Pour réaliser les conditions de cette proposition, il suffit par exemple de choisir K tel que $\sqrt{-1} \notin H$ (ce qui se produit si 2 n'est pas ramifié dans K) et de choisir trois idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ tels que $(\mathfrak{p}_i, H(\sqrt{-1})/K)$ soit égal à l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(H(\sqrt{-1})/H)$.

Preuve de la proposition 5.1. Lorsque $m = 3$ on a nécessairement : $\mathrm{Tor}(\Delta_{\mathfrak{m}}/U(\mathfrak{m})) \simeq \ker(\beta_{\mathfrak{m}})$. En effet il suffit de réécrire la suite exacte (3.4) en remarquant que les problèmes de torsion ne se manifestent pas avant $\mathfrak{m}$. Mais vu la décomposition (3.5) et le théorème 4.2 il suffit simplement de vérifier les deux conditions $\ker(\beta_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{m}}]/S(\mathfrak{m}))$ et $\mathrm{Tor}(\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}) \neq 0$. C'est le cas si le seul élément de torsion de $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{m}}/H)]/\widetilde{S}(\mathfrak{m})$ appartient à $\ker(\beta_{\mathfrak{m}})$ d'une part, et que son antécédent par l'isomorphisme (3.4) n'appartient pas à $U_{\mathfrak{m}}/U(\mathfrak{m})$ d'autre part. On a bien sûr $\ell = 2$, $o(G^{\ell}_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m})) = 2$ et $o(G_{\ell}(\mathfrak{m})) = 4$. On peut donc poser $G^{\ell}_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{m}) = \langle \tau_i \rangle, i = 1, 2, 3$, avec $\tau_3 = \tau_1\tau_2$ et $G_{\ell}(\mathfrak{m}) = \langle \tau_1 \rangle \times \langle \tau_2 \rangle$.

Si χ est le caractère trivial de G' alors Λ/Λ_{χ} est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'après le théorème 4.2. Comme $A_{\chi} = s(G')\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ est libre de rang 1 sur $\mathbb{Z}_{\ell}$, le seul élément de torsion de $A(\chi, \mathfrak{m})$ est la classe de $s(G')$. Dire que cette classe appartient à $\ker \beta_{\mathfrak{m}}$ revient simplement à vérifier que $s(G')\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ s'exprime en fonction des $\alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ pour $\mathfrak{n} \mid \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$. On a

$$2s(G')\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) = ((1 + \tau_1) + (1 + \tau_2) - \tau_1(1 + \tau_3))s(G')\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}).$$

On va vérifier que chaque terme de la forme $(1 + \tau_i)s(G')\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ appartient en fait à $2\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{m}}/H)]\ \alpha(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i, \mathfrak{m})$, en simplifiant par 2 cela donne l'expression attendue pour $s(G')\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$. Comme en (3.1), on note $\lambda_{\mathfrak{p}_i}$ un relevé dans $G_{\mathfrak{m}}$ du Frobenius en $\mathfrak{p}_i$ et on pose $\mathfrak{p}_i^* = \lambda_{\mathfrak{p}_i}^{-1} s(T_{\mathfrak{p}_i})/\#T_{\mathfrak{p}_i}$. Rappelons aussi que $G' = G'_1 \times G'_2 \times G'_3$ où les G'_i sont définis par $T_{\mathfrak{p}_i} = G'_i \times \{1, \tau_i\}$. D'où l'égalité

$$(1 + \tau_i)s(G')\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) = s(T_{\mathfrak{p}_i} \times G'_j \times G'_k)(1 - \lambda_{\mathfrak{p}_i}^{-1})(1 - \mathfrak{p}_j^*)(1 - \mathfrak{p}_k^*)$$

Par hypothèse l'automorphisme $\lambda_{\mathfrak{p}_i} \in \Gamma := \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{m}}/H)$. De plus le groupe $\Phi := T_{\mathfrak{p}_i} \times G'_j \times G'_k$ étant d'indice 2 dans Γ on obtient

$$s(\Phi)(1 - \lambda_{\mathfrak{p}_i}^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_{\mathfrak{p}_i} \in \Phi \\ s(\Gamma) - 2\lambda_{\mathfrak{p}_i}^{-1}s(\Phi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or $s(\Gamma)(1 - \mathfrak{p}_j^*) = s(\Gamma)(1 - \lambda_{\mathfrak{p}_j}^{-1}) = 0$ puisque $\lambda_{\mathfrak{p}_j} \in \Gamma$. Il suffit maintenant de remarquer que $s(\Phi)(1-\mathfrak{p}_j^*)(1-\mathfrak{p}_k^*) = s(G'_j \times G'_k)\alpha(\mathfrak{p}_j\mathfrak{p}_k, \mathfrak{m})$ pour pouvoir conclure que $s(G')\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ s'exprime bien en fonction des $\alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ pour $\mathfrak{n} \mid \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$. Plus précisément on a mis en évidence des sommes $x_i \in \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}_j\mathfrak{p}_k}/K)] \subset \Delta_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i}$ telles que

$$R := s(G') + x_1 + x_2 + x_3 \in \ker(\mathcal{F}).$$

Pour démontrer la proposition, il nous reste à prouver que cet élément n'appartient pas à U. Cela peut se faire au moyen d'un critère de parité. Pour ce, on introduit l'homomorphisme $\nu : \Delta \longrightarrow \mathbb{Z}$ défini par $\nu(\sigma) = 1$ si $\sigma \in G_{\mathfrak{n}}$ pour un $\mathfrak{n}$ de la forme $\mathfrak{n} = \prod_{i=1}^3 \mathfrak{p}_i^{e_i}$ avec des $e_i \geq 1$, et $\nu(\sigma) = 0$ sinon. Clairement $\nu(R) = \#G'$ est impair tandis que

Lemme 5.2. $\nu(U) \subset 2\,\mathbb{Z}$.

Preuve du lemme. On étudie les images par ν des générateurs de U notés $S(\mathfrak{n}, \mathfrak{p}^e, \sigma)$ en fin de section 2. Pour les générateurs du type (2.3) la parité est immédiate puisque $[K(\mathfrak{n}\mathfrak{p}) : K(\mathfrak{n})]$ est pair dès que $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n} \neq (1)$. En ce qui concerne les générateurs du type (2.2) leur image par ν est nulle sauf lorsque $\sigma \in G_{\mathfrak{n}}$ pour les $\mathfrak{n}$ de la forme $\mathfrak{n} = \prod_{i=1}^{3} \mathfrak{p}_i^{e_i}$ avec des $e_i \geq 1$. Dans ce dernier cas le $\mathfrak{p}$ de (2.2) est l'un des trois $\mathfrak{p}_i$, et $[K(\mathfrak{n}\mathfrak{p}^e) : K(\mathfrak{n})] = N(\mathfrak{p}^{\mathfrak{e}})$ est impair. D'où la parité de $\nu(S(\mathfrak{n}, \mathfrak{p}^e, \sigma)) = 1 + [K(\mathfrak{n}\mathfrak{p}^e) : K(\mathfrak{n})]$. $\square$

Références

[1] Jean-Robert Belliard. Sur la structure galoisienne des unités circulaires dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions. *J. Number Theory*, 69(1):16–49, 1998.

[2] Pierre Deligne and Kenneth A. Ribet. Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields. *Invent. Math.*, 59(3):227–286, 1980.

[3] Daniel S. Kubert. The universal ordinary distribution. *Bull. Soc. Math. France*, 107(2):179–202, 1979.

[4] Serge Lang. *Rapport sur la cohomologie des groupes*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[5] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer. Arithmetic of Weil curves. *Invent. Math.*, 25:1–61, 1974.

[6] Hassan Oukhaba. On elliptic units of abelian extensions of a given imaginary quadratic field. *Prépublication*, 1998.

[7] Jean-Pierre Serre. *Local fields*. Springer-Verlag, New York, 1979.

[8] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[9] Linsheng Yin. Distributions on a global field. *J. Number Theory*, 80(1):154–167, 2000.